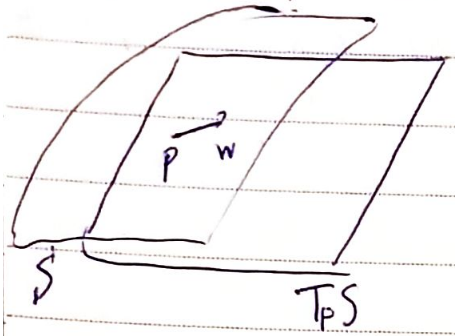
19/11/2018

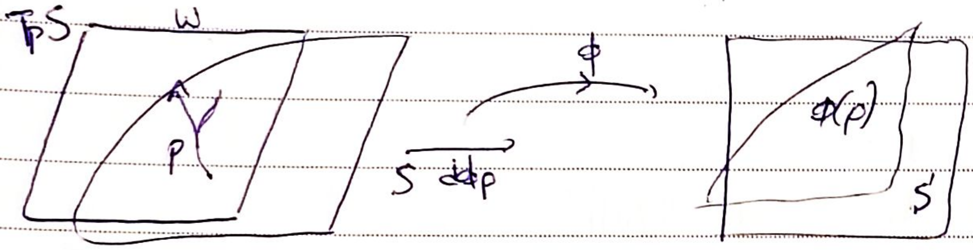
Πρώτη Θεμελιώδη



$I_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2$

Ισομετρικές Επιφάνειες



i) $\phi : S \to \tilde S$: διαφ/μος

ii) $\tilde I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = I_p(w)$

Παρατήρηση: Αν $S, \tilde S$ είναι γεωμετρικώς ισότιμες κανονικές επιφάνειες, τότε είναι και ισομετρικές

Απόδειξη

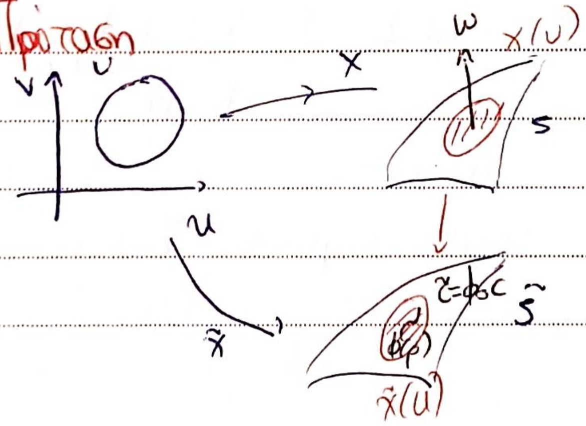
$\exists\, T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ $\quad \tilde S = T(S)$

$T = T_v \circ A$, $\quad A \in O(3)$ $\quad dT = A$

ορίζω $\phi = T|_S$ $\quad \phi : S \to \tilde S$ είναι διαφ.

$$\tilde I_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = \|d\phi_p(w)\|^2 = \|Aw\|^2 = \|w\|^2 = I_p(w)$$

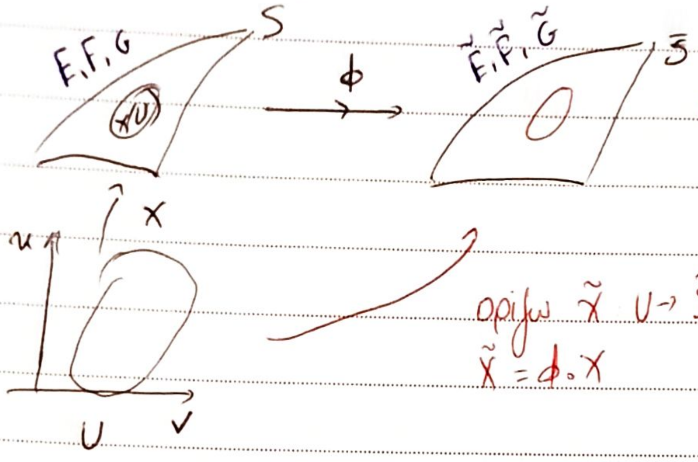
Πρόταση



Έστω $X : U \subset \mathbb{R}^3 \to S$ και $\tilde X : U \to \tilde S$ συστήματα συντεταγμένων με κοινές παραμετρικές $(u,v) \in U$. Αν ισχύει $\tilde E = E$, $\tilde F = F$ και $\tilde G = G$ τότε η απεικόνιση $\tilde X \circ X^{-1}$: $X(U) \to \tilde X(U)$ είναι ισομετρία μεταξύ των κανονικών επιφανειών $X(U)$ και $\tilde X(U)$.

Απόδειξη

Έστω $S, \tilde{S}$ ισομετρικές επιφάνειες και $\phi: S \to \tilde{S}$ ισομετρία.



$\tilde{x}(U) = \phi(x(U))$

ορίζω $\tilde{x}\ U \to \tilde{S}$

$\tilde{x} = \phi \circ x$

$d\tilde{x} = d(\phi \circ x) = d\phi \circ dx$ 1-1

$E = \|x_u\|^2, \quad F = \langle x_u, x_v \rangle, \quad G = \|x_v\|^2$

$\tilde{E} = \|\tilde{x}_u\|^2, \quad \tilde{F} = \langle \tilde{x}_u, \tilde{x}_v \rangle, \quad \tilde{G} = \|\tilde{x}_v\|^2$

$\tilde{x}_u = (\phi \circ x)_u = d\phi(x_u)$

$\tilde{x}_u = d\phi(x_u) \quad \tilde{F} = \|\tilde{x}_u\|^2 = \|d\phi(x_u)\|^2 = \tilde{I}_{\tilde{x}(u,v)}(d\phi(x_u))$

$= I(x_u) = \|x_u\|^2 = E$

Αντίστροφα: Υποθέτω ότι για συστήματα συντεταγμένων $x: U \to S, \tilde{x}: U \to \tilde{S}$ ισχύει $\tilde{E} = E, \tilde{F} = F, \tilde{G} = G$.

Θα δείξω ότι η $\phi: \tilde{x} \circ x^{-1}: x(U) \to \tilde{x}(U)$ είναι ισομετρία.

Η ϕ είναι διαφόρμες. Αρκεί να δείξω ότι $\tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = I_p(w)\ \forall p \in x(U)$
$\forall w \in T_pS$

Θεωρώ καμπύλη $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \to x(U)$, $c(0) = p$, $c'(0) = w$.
Η c έχει τη μορφή $c(t) = x(u(t), v(t))$. Θεωρώ καμπύλη $\tilde{c} = \phi \circ c$,
$\tilde{c}(0) = \phi(p), \quad \tilde{c}'(0) = d\phi_p(w)$

$\tilde{c}(t) = \phi(c(t)) = \phi(x(u(t), v(t))) = (\phi\circ x)(u(t), v(t)) = \tilde{x}(u(t), v(t))$

$\tilde{c}(t) = \tilde{x}(u(t), v(t))$

$w = c'(0) = u'(0)\, x_u(u(0), v(0)) + v'(0)\, x_v(u(0), v(0))$

$I_p(w) = E(u(0), v(0))\,(u'(0))^2 + 2F(\dots)\,u'(0)v'(0) + G(\dots)\,(u'(0))^2$

$d\phi_p(w) = \tilde{c}'(0) = u'(0)\, \tilde{x}_u(u(0), v(0)) + v'(0)\, \tilde{x}_v(u(0), v(0))$

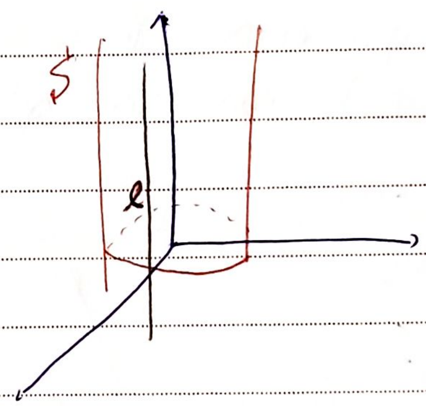
$\tilde{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(w)) = \tilde{E}(u(0), v(0))\,(u'(0))^2 + 2\tilde{F}(\dots)\,u'(0)v'(0) + \tilde{G}(\dots)\,(u'(0))^2$

$= E(u'(0))^2 + 2F(\dots)\,u'(0)v'(0) + G(\dots)\,(u'(0))$

Παραδείγματα - Ασκήσεις

1) Θεωρώ τον ορθό κυκλικό κύλινδρο

$S: x^2 + y^2 = r^2 \iff \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1$



Θέτω $\frac{x}{r} = \cos u$, $\frac{y}{r} = \sin u$

$\iff x = r\cos u$ $\quad y = r\sin u$

$z = v$

$X: U \subset \mathbb{R}^2 \to S$

$X(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$

$0 < \frac{u}{r} < 2\pi \iff 0 < u < 2\pi r$ $\quad v \in \mathbb{R}$

$U = (0, 2\pi r) \times \mathbb{R}$, $x: U \to V \cap S$ $\quad V = \mathbb{R}^3 \setminus \ell$ $\quad x_u \times x_v = \dots \neq (0,0)$

$x_u(u,v) = (-\sin\frac{u}{r}, \cos\frac{u}{r}, 0)$ $\quad x_v(u,v) = (0,0,1)$

Από πρόταση προκύπτει ότι x σύστημα συντεταγμένων

$E = \|x_u\|^2 = 1$

$F = \langle x_u, x_v \rangle = 0$

$G = \|X_v\|^2 = 1$

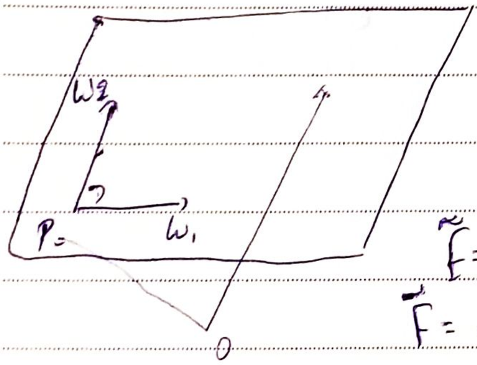
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad c(t) = X(u(t), v(t))$

$$L_a^b(c) = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t))} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{E(..)(u'(t))^2 + 2F(..)u'(t)v'(t) + G(..)(v'(t))^2} dt =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(u'(t))^2 + (v'(t))^2} \, dt$$

Θεωρώ επίπεδο Π το οποίο διέρχεται από σημείο P_0 και είναι παράλληλο προς τα ορθομοναδιαία διανύσματα w_1, w_2.



Θεωρώ το σύστημα συν/νων

$\tilde{X}: U \to \Pi$

$\tilde{X}(u, v) = P_0 + u w_1 + v w_2$

$\tilde{X}_u = w_1 \qquad \tilde{X}_v = w_2$

$\tilde{E} = \|\tilde{X}_u\|^2 = \|w_1\|^2 = 1$

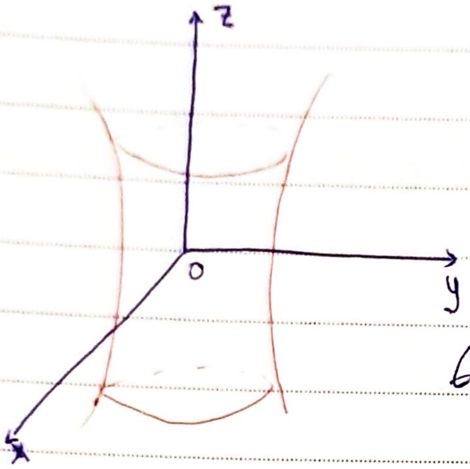
$\tilde{F} = \langle \tilde{X}_u, \tilde{X}_v \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle = 0$

$\tilde{G} = \|\tilde{X}_v\|^2 = \|w_2\|^2 = 1 \qquad \begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα, $X(U)$ και $\tilde{X}(U)$ είναι ισομετρικές επιφάνειες.

Συμπέρασμα: Κύλινδρος και επίπεδα είναι τοπικά ισομετρικές επιφάνειες

Αλυσοειδής Επιφάνειες $\quad S: x^2+y^2=a^2\cosh^2\frac{z}{a}, \quad a>0$



$S=f^{-1}(0),\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=x^2+y^2-a\cosh^2\frac{z}{a}$

Βάσει του θεωρήματος $S=f^{-1}(0)$ είναι κανονική επιφάνεια.

Θέτω $\frac{z}{a}=u$ $\quad S: x^2+y^2=a^2\cosh^2 u$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{a\cosh u}\right)^2+\left(\frac{y}{a\cosh u}\right)^2=1$$

Θέτω $\frac{x}{a\cosh u}=\cos u$, $\frac{y}{a\cosh u}=\sin u$.

Θεωρώ το σύστημα συν/νων επί S με
$(a\cosh u\cos u,\ a\cosh u\sin u,\ au)=x(u,v)$

Τα θεμελιώδη ποσά 1ης τάξης της S ως προς το x είναι
$E(u,v)=\|x_u(u,v)\|^2=a^2\cosh^2 u=G(u,v)$
$F(u,v)=0$

$$\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}=a^2\cosh^2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Ελικοειδής επιφάνεια $\tilde{S}: x\sin\frac{z}{a} = y\cos\frac{z}{a}$

Παρατηρώ ότι: $\tilde{S} = f^{-1}(0)$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$
$f(x,y,z) = x\sin\frac{z}{a} - y\cos\frac{z}{a} \Rightarrow \dots \overset{\text{θεώρημα}}{\Rightarrow} \tilde{S}$ είναι κανονική επιφάνεια

Θέτω $\frac{z}{a} = \tilde{u} \Leftrightarrow z = \tilde{u}a$ $\quad x = \sin\tilde{u} = y\cos\tilde{u}$

Θέτω $x = \tilde{v}\cos\tilde{u}$, $y = \tilde{v}\sin\tilde{u}$

$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{v}\cos\tilde{u}, \tilde{v}\sin\tilde{u}, a\tilde{u})$ ⊛, $(\tilde{u},\tilde{v}) \in (0,2\pi) \times \mathbb{R}$
Η $\tilde{X}: U \to \tilde{S}$ είναι σύστημα συντεταγμένων (άσκηση)
• Τα θεμελιώδη ποσά της $\tilde{S}$ ως προς $\tilde{X}$ είναι $\tilde{E}(\tilde{u},\tilde{v}) = \|\tilde{X}_{\tilde{u}}\|^2 = u^2 + a^2$
$\tilde{F}(\tilde{u},\tilde{v}) = 0$, $\tilde{G}(\tilde{u},\tilde{v}) = 1$

$\begin{pmatrix} \tilde{E} & \tilde{F} \\ \tilde{F} & \tilde{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι δυνατόν $\tilde{v}^2 + a^2 = a^2\cosh^2 u$
$\Leftrightarrow \tilde{v}^2 = a^2(\cosh^2 u - 1) \Leftrightarrow \tilde{v}^2 = a^2\sinh^2 u$

$\varphi(u,v) = (u, a\sinh u)$ $\qquad \frac{\partial(\tilde{u},\tilde{v})}{\partial(u,v)} \neq 0 \Rightarrow \bar{X} = \tilde{X} \circ \varphi$ είναι σύστημα συν/νων της $\tilde{S}$

$\bar{E}(u,v) = \bar{G}(u,v) = a^2\cosh^2 u$, $\bar{F}(u,v) = 0$

⊛ $= (0,0,a\tilde{v}) + \tilde{v}(\cos\tilde{u}, \sin\tilde{u}, 0)$